



REVISTA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOGRAFIA

ANO IV

VOLUME 4

2000



REVISÃO BIBLIOGRÁFICA COMO CONTRIBUIÇÃO AOS ESTUDOS DA APLICABILIDADE DA MATEMÁTICA DOS FRACTAIS AOS FENÔMENOS GEOGRÁFICOS

Ana Clara Mourão Moura¹

INTRODUÇÃO

Desde que se tem notícia dos questionamentos do homem sobre a lógica da natureza e sobre possíveis explicações para fenômenos, a questão da ordenação formal e das relações entre as partes é uma das tônicas das abordagens. Na necessidade de sintetizar, simplificar e reduzir a complexidade do universo a respostas que trariam conforto a seus questionamentos, o homem busca "leis generalizantes", "explicações universais". Ao final de tudo, fica a máxima de Sócrates: *"Quanto mais sei, mais sei que nada sei"*.

Para os gregos, a noção de equilíbrio vinha da matemática e da estética, intimamente relacionadas. Da geometria, da simetria e da razão viria a resposta para a busca da perfeição. Procurando um número mágico que garantiria o equilíbrio, os gregos realizaram medições no corpo humano e definiram que as partes estavam em uma relação de proporção que foi denominada "segmento áureo". A partir da definição dessa proporção, a intervenção do homem grego sobre o espaço passou a se basear nessa relação, no uso de unidades modulares nesse valor, o que garantiria o equilíbrio formal. A razão desenha o espaço (SNYDER, J.C., CATANESE, A., 1984).

A Proporção Áurea é definida por :

$$\text{Equação 1} \rightarrow \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0,618$$

A Equação 1 descreve a relação que deve haver entre dois segmentos, entre duas medidas espaciais quaisquer, para que elas estejam em proporção áurea e, conseqüentemente, haja harmonia e equilíbrio na composição. Tomando como exemplo a estátua de Apolo, apresentada em seguida, as dimensões usadas para representar cada componente do corpo são múltiplos de 0,618 de uma unidade de medida, o que garante a harmonia entre as partes. Usando como exemplo um templo grego, para que o conjunto resultasse harmonioso, projetava-se com múltiplos do segmento áureo – o que significa que uma superfície poderia medir, por exemplo, 6.18m e outra 3.09m (usando como unidade o metro), pois sendo os componentes resultantes do segmento áureo, a composição daria a

¹ Doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Geografia, danaclara@csr.ufmg.br

noção de equilíbrio estético e boa proporção.



Figura 1 - Estátua de Apolo - construção baseada na Proporção Áurea, em medidas múltiplas de 0.618 de uma unidade. (BRANDÃO, 1995).

A geometria euclidiana, também conhecida por geometria "clássica", durou dois milênios e, certamente, é a única geometria conhecida pela maioria das pessoas, até hoje. Os artistas viram nela uma beleza ideal, os astrônomos *ptolomeicos* construíram uma teoria do universo com ela. Formas clássicas como linhas, planos, círculos, esferas, triângulos e cones foram referências para a construção de máquinas e para traçados das cidade. A matemática gerava padrões.

"Uma das maneiras mais tradicionais de análise de um sistema pela ciência tradicional é a divisão e redução: observar um sistema que se deseje analisar, dividi-lo em suas partes constituintes e analisar as partes. O somatório deve ser igual ao todo. As escalas alcançáveis pela mente e visão da humanidade foram se expandindo; foram criadas outras perspectivas. Com a criação e o desenvolvimento dos computadores, mais possibilidades se abriram para a compreensão e estudo das escalas. Quanto mais se olhava, mais se dividia, mais se especializava, mais se classificava."(UBIRAJARA DA SILVA, 1998).

Os sistemas eram vistos como lineares; podiam ser montados e desmontados que as peças se encaixariam. Seria possível fazer previsões, uma vez que definida a reta (a explicação) estariam definidos todos os possíveis pontos (as possíveis ocorrências). Assim como a geometria clássica, a "mecânica clássica", baseada em princípios de Newton, defendia que o conhecimento de um instante inicial em um sistema físico (posição e velocidade) permitia a dedução de seu estado em qualquer outro instante. Relações não lineares, como a que existe entre atrito e velocidade na aceleração, eram tratadas como exceção (RUELLE, 1993).

Algumas correntes científicas, em separado, começaram a questionar as relações lineares para as explicações dos fenômenos: é possível falar de aceleração sem considerar a mútua relação entre atrito e velocidade? É da relação entre as variáveis que surge o novo fator. Não se pode atribuir um valor constante ao atrito, pois ele depende da velocidade. A velocidade, por sua vez, depende do atrito. Esse tipo de relação caracteriza os sistemas dinâmicos. Em busca de explicações para os sistemas dinâmicos, e acreditando na existência de uma ordem na desordem, surgem, na

década de 70, estudos que foram denominados como “Teoria do Caos”. Segundo GLEICK (1990) a nova ciência é baseada em três coisas: a relatividade, a mecânica quântica e o caos. A relatividade elimina a visão newtoniana sobre o espaço e tempo absolutos; a teoria quântica elimina o sonho newtoniano de um processo controlável de mensuração e o caos elimina a fantasia laplaciana da previsibilidade determinista.

“Toda a tradição da física é que, isolados os mecanismos, todo o resto flui. Isso está desmoronando totalmente. Nesse caso, sabemos as equações certas, mas elas nada valem. Somamos todas as peças microscópicas e vemos que não podemos entendê-las a longo prazo. Elas não são o que é importante no problema. Isso modifica totalmente o significado de saber alguma coisa.” (GLEICK, op.cit).

O mesmo autor coloca que, na nova corrente, os questionamentos se desenvolvem sobre pontos como:

- qual o papel de um único neurônio no conjunto e quais as relações entre milhões deles?
- como surge a ordem em um universo dominado pela entropia, quando o mais lógico seria a ocorrência da desordem cada vez maior?
- o que significa a fantástica e delicada estrutura de bifurcações e periodicidade subjacentes à complexidade?

A Ciência hoje aborda questões relativas a tempo e espaço, buscando no pensamento do Caos novas referências para interpretações dos fenômenos. Assim, PEITGEN, JURGENS e SAUPE (1992, *apud* CHRISTOFOLETTI, 1999) explicam a relação entre a Teoria do Caos e a Geometria Fractal:

“Quando se examina o desenvolvimento de um processo ao longo do TEMPO, fala-se de termos usados na Teoria do Caos. Quando o interesse se encontra dirigido para as FORMAS ESTRUTURAIS resultantes do processo caótico, então se usa a terminologia da Geometria Fractal.”

DO CAOS AOS FRACTAIS

O estudo moderno do Caos começou quando, na década de 60, Edward Lorentz verificou que pequenas diferenças de insumo podiam transformar-se rapidamente em expressivas diferenças no resultado - um fenômeno que recebeu o nome de “**dependência sensível das condições iniciais**”. Lorentz observava que, em um dado domínio, um fenômeno apresentava repetições que nunca eram perfeitamente iguais, mas havia um padrão, uma ORDEM NA DESORDEM. Outros estudos mostraram serem cinco as características ou propriedades abordadas pela Teoria do Caos: sensibilidade às condições iniciais, fractalidade, autossimilaridade, ultrametricidade e criticalidade (GLEICK, 1990).

Sensibilidade às condições iniciais

Pequenas alterações em alguns fatores de ação podem alterar significativamente o resultado final que estava previsto. Intervenções pontuais geram efeitos de irradiação dos resultados. Esse conceito, também conhecido como “efeito borboleta”, coloca que o bater de asas de uma borboleta no Japão pode resultar em tempestade nos EUA, ou seja: as variáveis ambientais estão interrelacionadas, de modo que alterações em variáveis pode resultar em completa modificação da realidade espacial. Foi dentro dessa consciência que surgiram movimentos como “Gaia”, “visão holística” e a defesa da “sustentabilidade”.

Segundo MOURA (1994):

“A visão holística do mundo foi usada nos estudos de desenvolvimento ligados ao meio ambiente, objetivando chamar à responsabilidade as partes envolvidas. A mesma foi embasada pela Teoria do Caos, que alerta para o fato de que os fenômenos mundiais estão correlacionados dentro de um sistema não-linear. Ressaltam-se os riscos em que as lesões ambientais podem resultar em nível mundial, pois os colapsos serão locais, mas os efeitos serão sentidos em nível mundial”.

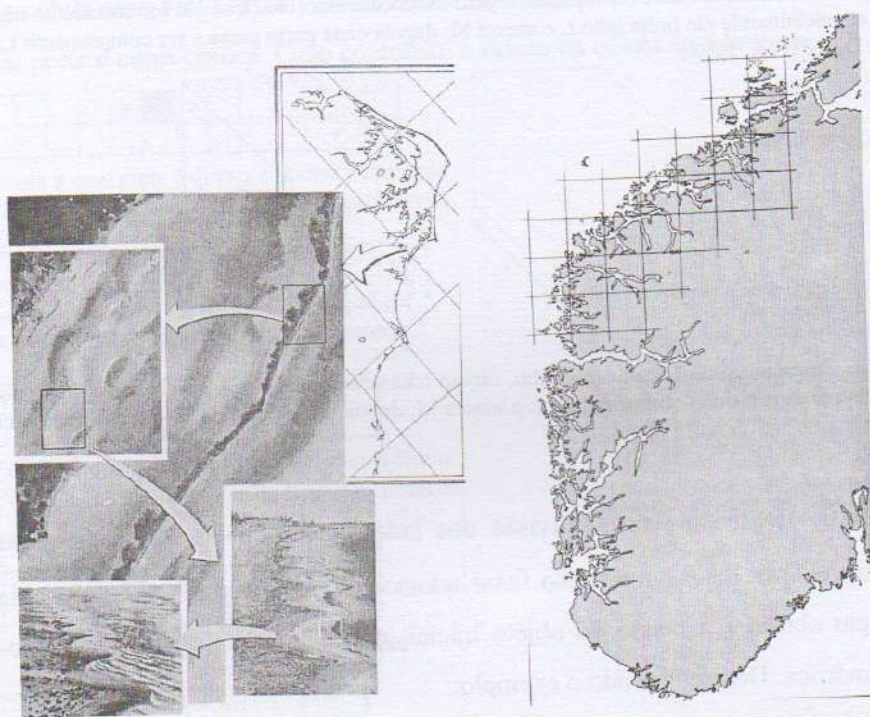
Pode-se exemplificar a interrelação das variáveis espaciais e o “efeito cascata” a partir de uma intervenção pontual, citando o caso dos transportes urbanos, segundo conceitos defendidos por PRADO (1989): Ocorrendo a mudança de uso do solo em uma dada região (por exemplo – a implantação de um *campus* universitário em um bairro), pode-se observar o acréscimo à população da área, aumentando a demanda por transporte. Isso levará a comunidade a se organizar e ir em busca do serviço junto aos órgãos competentes. Uma vez atendida a solicitação, a área terá mais acessibilidade, o que resulta em sua valorização, e conseqüentemente, no surgimento de pressões por novas mudanças no uso do solo (melhor padrão de ocupação). Cria-se, assim, um efeito cascata quando uma intervenção pontual gera efeitos de irradiação dos resultados. Além da questão dos transportes e uso do solo, paralelamente, outras variáveis estavam sofrendo alterações e gerando, também, suas modificações em variáveis a elas interrelacionadas.

Fractalidade

A idéia de fractalidade foi, inicialmente, proposta por Benoit MANDELBROT (1967), em seu artigo “Qual extensão tem o litoral da Grã-Bretanha?” Segundo o autor o valor pode ser infinito se considerarmos a possibilidade de uso de diferentes escalas de medição, pois utilizando como escala de leitura o quilômetro, não são consideradas as medições de metros; por outro lado, se utilizada como unidade de leitura o metro, não é medida, por exemplo, uma curva de 30 cm de extensão, e daí por diante. A extensão real do litoral da Grã-Bretanha, como pode ser observado nas

Figuras 2 e 3, não pode resultar em um único valor, euclidiano, mas o resultado está intimamente relacionado à escala: quanto maior o detalhamento (maior aproximação), maior o valor obtido.

No exemplo citado, Mandelbrot enfoca a questão da **dimensão**. Segundo o pesquisador, o mundo euclidiano é tridimensional, pois usa somente três dimensões para localizar um ponto no espaço. Contudo, essa dimensão, no novo olhar do Caos, **depende do observador**. Um rolo de barbante, se é visto de muito longe, pode ser caracterizado como um ponto; já o fio desenrolado pode ser monodimensional, e o mesmo visto microscopicamente apresenta-se em colunas tridimensionais que, por sua vez, se transformam em fibras monodimensionais, e daí por diante...(GLEICK, 1990).



Figuras 2 e 3 - Medição do litoral da Grã-Bretanha e seu valor infinito, segundo MANDELBROT (1967). Imagens a partir de KORVIN (1992) e CHRISTOFOLETTI (1999).

Com essa discussão, Mandelbrot define as **dimensões fractais**. A dimensão fracionada nos dá condições de estudar e medir propriedades como **grau de aspereza**, ou de **irregularidade**, ou de **fragmentação** (fracturalidade) de um objeto.

Exemplos de como se definir esta dimensão de fragmentação de um objeto através de transformações da escala podem ser vistos nas Figuras 4 a 6:

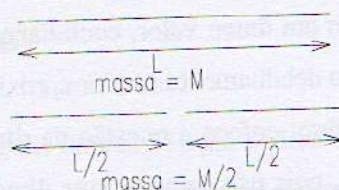


Figura 4 - Reta Unidimensional (tendo uma reta, objeto monodimensional ($D=1$) de comprimento L e massa M , se ela for cortada ao meio, cada metade passa a ter comprimento $L/2$ e massa $M/2$. (UBIRAJARA DA SILVA, 1998).

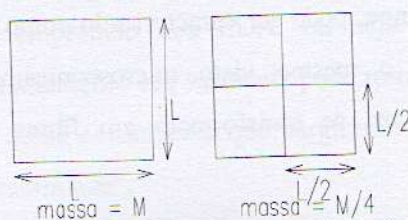


Figura 5 - Plano Bidimensional (tendo um plano, objeto bidimensional ($D=2$), se ele for cortado ao meio em ambas as duas direções, se inicialmente ele tinha lado L e massa M , depois cada parte passa a ter comprimento $L/2$ e massa $M/4$. (UBIRAJARA DA SILVA, 1998).

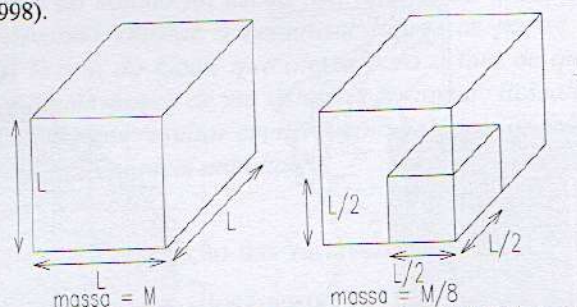


Figura 6 - Cubo Tridimensional (tendo um cubo, objeto tridimensional ($D=3$), se ele for cortado ao meio nas três direções, se inicialmente ele tinha comprimento L e massa M , depois cada parte passa a ter comprimento $L/2$ e massa $M/8$. (UBIRAJARA DA SILVA, 1998)

O fator de fragmentação, ou divisão dos lados, utilizado em todos os casos foi $\lambda=1/2$. Mesmo que outro fator de fragmentação fosse adotado, haveria sempre a mesma relação entre a massa do objeto obtido e a massa do objeto inicial, definida pela Equação 2 abaixo, sendo D a dimensão geométrica. Desenvolvendo o exemplo:

$$\text{Equação 2} \rightarrow M\lambda(L) = \lambda^D M(L)$$

Para $D=1$, massa do objeto obtido $= (1/2)^1 = 1/2$ da massa original;

Para $D=2$, massa do objeto obtido $= (1/2)^2 = 1/4$ da massa original;

para $D=3$, massa do objeto obtido $= (1/2)^3 = 1/8$ da massa original.

Assim, é possível medir o grau de **aspereza**, fragmentação ou irregularidade de um objeto. Quanto maior o D , maior a diferença entre a massa inicial e sua subdivisão, o que significa maior aspereza do objeto. Estas questões serão melhor detalhadas no item "Dimensão Fractal", mas vale dizer que no exemplo já citado das medições costeiras de Mandelbrot, quanto maior a dimensão fractal (ou D) maior a tortuosidade do espaço, ocorrendo o mesmo para as medições da topografia. O grau de irregularidade permanece constante em diferentes escalas.

A fragmentação pode também ser explicada através dos autômatos celulares, formado por uma rede de células cujo valor evolui no **tempo**, segundo uma **regra específica**, e em função das células vizinhas. É o conceito de recorrência em matemática. (KORVIN, 1992). A cada passo da evolução dinâmica do sistema os valores de todas as células são atualizados simultaneamente, isto é, em paralelo.

Segundo LANGRAN (1992), os autômatos celulares foram inicialmente propostos em estudos de modelos de difusão realizados por CODD (1968), *“to break away from the grid and thereby simulate spatial interactions and multi-scaled processes more realistically”*.

Na Figura 7, as células assumem o valor branco ou preto. A regra dinâmica escolhida é: o futuro de cada célula será preto se os valores atuais de suas vizinhas à esquerda e à direita forem diferentes, uma preta e outra branca. Caso contrário, o futuro da célula será branco:

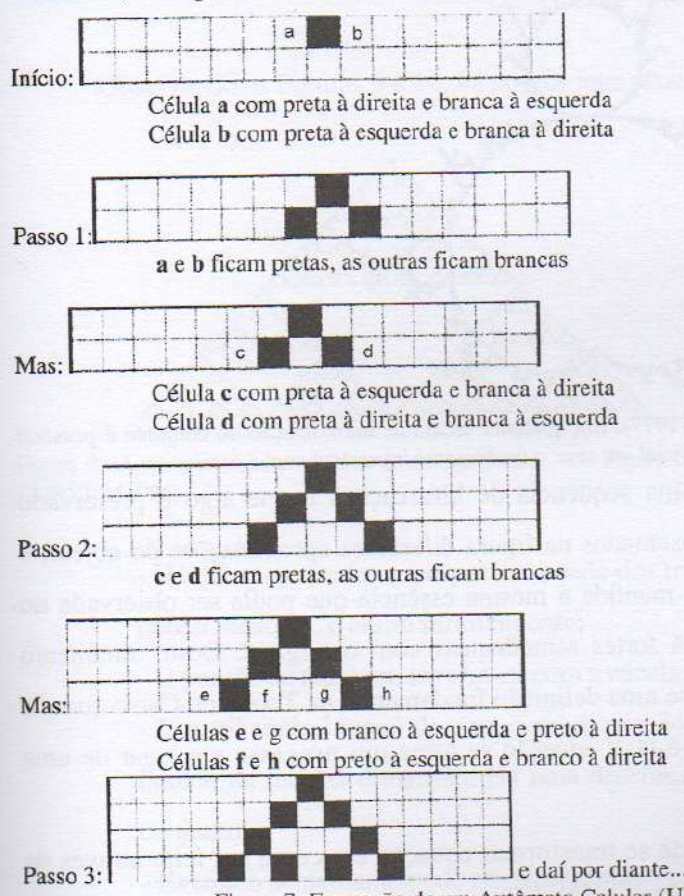


Figura 7: Formação de um Autômato Celular (UBIRAJARA DA SILVA, 1998).

Esta repetição de estruturas em bifurcações ou ramificações pode ser vista no desenho formado pela queda de um raio, nos ramos de uma árvore, na rede de artérias e veias. Esta possibilidade de subdivisão e redução dos elementos componentes em partes cada vez menores é batizado por Mandelbrot como o **“Polímero do Diabo”**, ou seja: é infinita a possibilidade de se encontrar novos microelementos entre dois elementos em uma determinada escala. Qualquer

segmento, por menor que seja, se ampliado, revela novas moléculas, todas semelhantes ao corpo principal, porém sem ser exatamente igual.

Um exemplo matemático da sequência de bifurcações e da revelação de novas formas que mantêm características semelhantes ao corpo principal é um desenho fractal apresentado na Figura 8, conhecido por “Conjuntos de Júlia”, criado por MANDELBROT em 1977:

- Pega-se um número complexo e eleva-se ao quadrado;
- Ao resultado, acrescenta-se o número original e eleva-se ao quadrado;
- Ao resultado, acrescenta-se o número original e eleva-se ao quadrado e etc;
- Se o total projetar-se para o infinito, o ponto não está no conjunto, mas se o total for finito (der um *loop* ou vagar caoticamente) o ponto está dentro do conjunto.

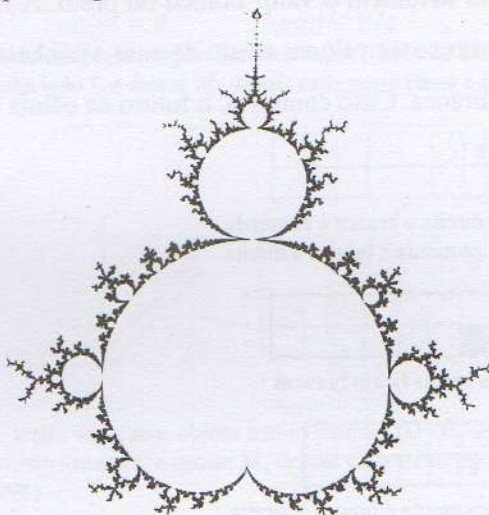


Figura 8- Conjuntos de Júlia – MANDELBROT (1977). Em qualquer escala de aproximação do conjunto é possível observar uma repetição da essência configuração inicial, ou seja: o fenômeno é invariável com a escala.

Na Figura 8 observa-se que há uma sequência de bifurcações e que algo é preservado enquanto tudo mais se modifica. São apresentados na figura diferentes aproximações do objeto, e nota-se que em escala de maior detalhe é mantida a mesma essência que podia ser observada no conjunto visto como um todo, ou seja, há fortes semelhanças com o original. Deste tratamento matemático, chamado de recorrência, tem-se uma definição fundamental da Teoria do Caos: quando se repete uma equação em lugar de resolvê-la, a equação se torna um **processo** em lugar de uma **descrição**; **dinâmica** em lugar de **estática**.

No método euclidiano, o processo de se transformar equação em curva era feito através da localização, em eixos cartesianos, de variáveis que pudessem satisfazer a equação. Exemplo: tendo a equação $x^2+y^2=1$, ao lançarmos todos os pares x,y cujos valores elevados ao quadrado e somados resultam em “1”, acharemos o desenho do círculo. Na equação $y=ax+b$, ao lançarmos todos os pares x,y cujos valores satisfaçam a equação, encontraremos a reta na qual “b” é o ponto onde a reta corta o eixo dos y e “a” é a inclinação desta reta. Assim, segundo GLEICK (1990), no método euclidiano uma equação descreve uma **situação estática**; enquanto que pela Teoria do Caos a equação é automaticamente repetida, o que resulta em um **processo dinâmico**.

Autossimilaridade

O termo fractal vem do latim *fractus*, que significa descontínuo, irregular ou quebrado. Segundo TURCOTTE (1991) "*objects that are scale invariant are fractals*". É um termo associado a fenômenos mantêm um padrão de comportamento ou de organização física em diferentes escalas de observação. Para GLEICK (1990) fractal significa, acima de tudo, auto-semelhante, o que representa simetria através das escalas. Significa recorrência, um padrão dentro do outro.

No exemplo da subdivisão da linha, do plano e do cubo (Figuras 4 a 6), ao se efetuar a transformação da escala de fator $1/2$, nota-se que o padrão continua o mesmo. O padrão também continua o mesmo nos autômatos celulares (Figura 7) e nos conjuntos de Júlia (Figura 8). Pode-se imaginar, ainda, uma nova rede superposta à original.

Observando as Figuras 9 e 10, há pontos interessantes a serem considerados:

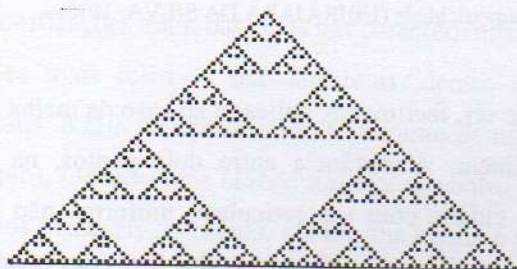


Figura 9 - Autômato Celular - o arranjo de Sierpinski, KORVIN (1996)

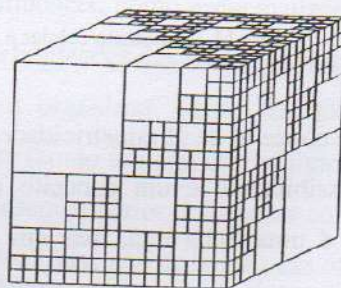


Figura 10 - Fragmentação do cubo, TURCOTTE (1992)

- Há diferentes redes superpostas: a rede dos triângulos maiores, a rede dos triângulos um pouco menores, e assim infinitamente;
- O padrão se mantém, invariável com a escala;
- Um triângulo branco de uma certa dimensão nunca será vizinho de um outro triângulo branco da mesma dimensão. Há uma distribuição das diferentes dimensões ao longo do conjunto.
- Exemplo semelhante pode ser representado pela fragmentação do cubo.

Ultrametricidade

Em um triângulo qualquer, o valor de um lado será sempre menor que o valor da soma dos outros dois lados. Logo, a figura é ultramétrica.

Usado o exemplo do autômato celular, como na Figura 11, se consideramos que a regra é só

poder se mover nas células pretas, observe:

- A distância para ir do ponto 1 para o ponto 3 é a mesma que para ir do ponto 1 ao ponto 4 (5 quadradinhos pretos). Já a distância entre o ponto 4 e o ponto 5 é muito maior (13 quadradinhos pretos)
- Tomando três posições quaisquer na mesma linha horizontal (no mesmo nível hierárquico) a distância entre dois deles é no máximo igual à maior das duas outras distâncias envolvidas. (ex.: distância entre 1 e 3 = 1, distância entre 1 e 5 = 13, e distância entre 3 e 5 = 13).

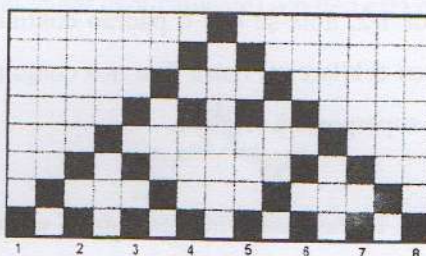


Figura 11 - Autômato celular e a ultrametricidade (UBIRAJARA DA SILVA, 1998).

Este conceito da ultrametricidade pode ser, facilmente, aplicado ao caso da malha urbana, na qual a acessibilidade é um conceito não-linear. A distância entre dois pontos, na geometria euclidiana, é uma linha reta, mas em uma cidade com um reticulado uniforme não é possível percorrer diagonais, mas somente através da somatória das distâncias das faces das quadras. Desta observação foi proposta por Krause (1975, apud ABREU, 1982) a “Geometria do Taxi”, assim definida por ABREU (op.cit.:32):

“Normalmente, a percepção do espaço pela grande maioria das pessoas é tipicamente uma “percepção euclidiana”, e a distância “visualizada” é uma linha reta, quando, na realidade, muitas vezes essa geometria não se aplica à realidade, como no caso do espaço urbano reticulado, por exemplo, onde a movimentação de veículos e pessoas é um variado movimento de dobrar à esquerda e à direita nos diversos quarteirões.”

Criticalidade

Tanto no exemplo do autômato celular com triângulos (Figura 9), como na subdivisão do cubo (Figura 10), pode-se observar que os menores elementos aparecem com frequência, enquanto que os maiores são mais raros. O número de triângulos (de espaço vazios) está relacionado com o lado horizontal de cada vazio, sendo esta uma relação de potência conhecida como criticalidade, e que aparece nos sistemas em que há mudanças de fase.

A água é um exemplo em que há mudanças de fase. A água ferve a 100° Celsius, e aumentando a temperatura de ebulição bolhas cada vez maiores são observadas, até que a 374°

Celsius bolhas de todos os tamanhos possíveis são observadas, caracterizando um estado crítico. Nesta temperatura a compressibilidade da água é muito alta, pois as grandes bolhas podem ser transformadas de vapor em líquido. O mais interessante, segundo GLEICK (1990), é que o valor do expoente crítico não depende da água, mas é o mesmo para sistemas completamente distintos. O material ferromagnético perde sua capacidade de imantação acima de uma temperatura crítica. Na temperatura crítica há também “bolhas” de magnetização de todos os tamanhos possíveis e a capacidade do material de susceptibilidade magnética neste ponto é infinita. Assim, a compreensão dos expoentes críticos ajuda no estudo de diferentes sistemas reais.

Esta idéia de subdivisão, de existência de diferentes níveis hierárquicos, e de uma criticalidade na qual haveria a mudança de fase e na qual um elemento estaria em suas potencialidades máximas, foi trabalhada, de certa forma, por CHRISTALLER (1966). A Teoria dos Lugares Centrais foi proposta por Christaller em 1933, mas foi só em 1966, a partir de sua publicação em inglês, que ela passa a ser difundida. O autor propôs a existência de um modelo físico de localização de cidades segundo suas áreas de influência, como esquematizado na Figura 12. As classificações eram baseadas nas características e delimitações das áreas de influência, sendo as posições mais relativas que absolutas, dentro de um organismo geral. Há dois conceitos fundamentais: o raio de ação e o limiar mínimo de um bem (como um número mínimo de clientes, por exemplo). Quando uma cidade tornava-se centro de ordem superior, existia no conjunto todos os tamanhos possíveis de cidade. Da mesma forma é possível falar a distribuição das atividades no solo urbano, no qual atividades como as comerciais podem ter influência local, de bairro, de região ou municipal; ampliações poderiam ser feitas até a escala mundial, como uma atividade localizada em Nova York.

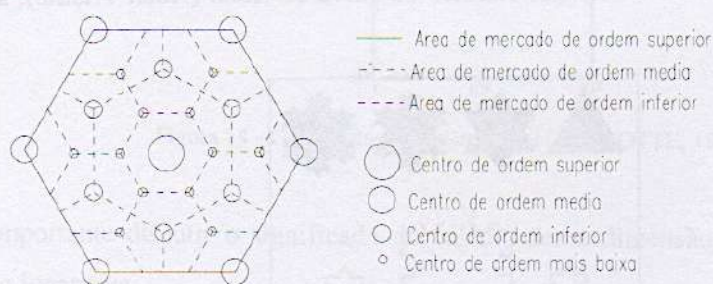


Figura 12- Teoria dos Lugares Centrais proposta por CHRISTALLER em 1966 (adaptado de BRADFORD, 1987).

DIMENSÕES FRACTAIS

A geometria fractal é uma nova linguagem para descrever, modelar e analisar formas complexas. A partir do arranjo e da disposição das estruturas é possível estudar a espacialidade do fenômeno.

Sobre as características dos fractais, CHRISTOFOLETTI (1999) sintetiza em três os

atributos fractais: o escalante (*scaling*), a autossimilaridade e a complexidade. Pelo escalante explica-se que os fractais mostram detalhes similares em diferentes escalas. Pela autossimilaridade observa-se que as formas vistas em detalhe em uma escala são similares às vistas em detalhe em outra escala. Finalmente, pela complexidade observa-se uma configuração interativa dos componentes, provocando uma dinâmica caótica dos sistemas, daí a imprevisibilidade da forma específica a ser gerada.

Abordando a questão da escala, no estudo de qualquer fenômeno espacial acredita-se que deve ser ponto de partida a compreensão do domínio de atuação do mesmo, assim como a organização espacial das feições de interesse. CAO e LAM (1997, *apud* EMERSOM, LAM e QUATTROCHI, 1999) assim colocam a questão da escala:

- Escala Cartográfica - proporção de distância em um mapa com a área medida;
- Escala Geográfica - tamanho ou extensão espacial de um fenômeno estudado;
- Escala Operacional - domínio espacial em que processos operam no ambiente;
- Escala de Medição (resolução) - em que se pode distinguir objetos.

A possibilidade de se trabalhar com fractais, segundo TURCOTTE (1991), nos ajuda a construir uma ponte entre a geoestatística e as modelagens físicas e químicas dos processos espaciais. Acredita-se nessa possibilidade não só nas questões físicas e químicas, mas nas correlações de variáveis espaciais de um modo geral, o que envolve até as sócio-econômicas.

Um ponto importante é a definição da **dimensão fractal** do fenômeno, pois significa o seu grau de rugosidade. Por grau de rugosidade pode-se entender a existência de dimensões intermediárias, que não se limitam ao mono, bi e tridimensional. Para explicar o cálculo da dimensão fractal, é bastante útil o exemplo clássico da curva de Koch (Koch Triadic), apresentado na Figura 13:

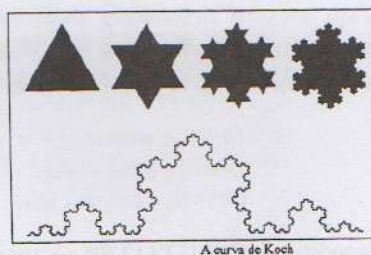


Figura 13 - A curva de Koch (GLEICK, 1990).

- o primeiro triângulo tem 3 lados ($N=3$) com tamanho r_1 ;
- no segundo objeto são acrescentados 3 triângulos de dimensão $r_2=r_1/3$, ou seja: cada face recebe um novo triângulo de dimensão igual a $1/3$ da face anterior, o que resulta em 12 lados ($N=12$);
- no terceiro objeto cada face recebe novo triângulo de dimensão igual a $1/3$ da face anterior, e daí por diante...
- observa-se que, ao subdividir cada vez mais as faces do triângulo, aumenta-se a rugosidade, que vai de lisa a infinita. Devido ao fato do comprimento fractal se aproximar

do infinito, a dimensão fractal é sempre maior que a unidade (para estruturas com base em linhas, de 1 a 1,99).

O cálculo da dimensão fractal é dado por:

$$\text{Equação 3} \rightarrow D = \frac{\ln(N2/N1)}{\ln(r1/r2)}$$

$$\text{No caso acima, aplicando a fórmula: } D = \frac{\ln(12/3)}{\ln(r1/r1/3)}$$

$$= \ln 4 / \ln 3 \text{ (entre 1 e 1,99)}$$

O perímetro, por sua vez, é dado por:

$$\text{Equação 4} \rightarrow P = Nr = Cr^{1-D}$$

sendo: P - perímetro; N - n° objetos; C - constante; D - dimensão fractal;
r - tamanho do lado

Muito próximo a este valor de 1,262 estão as dimensões fractais das linhas de costa (1,25) e de muitos tipos geológicos. Observa-se na Figura 14 que, à medida em que se aumenta a dimensão do objeto (r - no eixo x), diminui o valor do perímetro (P - eixo y); ou seja: aumentando o objeto não são capturados os valores das pequenas parcelas (que vão ao infinito, no "Polímero do Diabo").

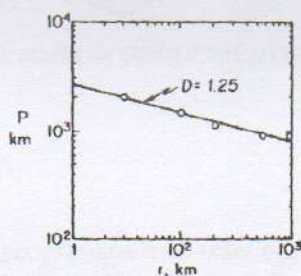


Figura 14 - Gráfico da dimensão fractal (TURCOTTE, 1991).

É importante discutir o significado do cálculo dessa dimensão fractal, ou o que significa uma relação logarítmica:

$\log_a b = x$ "x" é o valor que se deve elevar a base "a" de modo que a potência obtida seja igual a "b".

ex.: $\log_2 8 = 3$, pois $2^3 = 8$ $\log 100 = 2$, pois $10^2 = 100$

O logaritmo neperiano, ou \ln , é o logaritmo na base de Neper, ou seja, na base do número $e = 2,71828...$. O logaritmo neperiano é também chamado de logaritmo natural, pois os fenômenos naturais geralmente aparecem em uma lei exponencial de base e .

Para melhor compreensão, propõe-se o exemplo do cálculo da dimensão fractal no cubo,

conforme Figura 10 (Fragmentação do Cubo). Aplicando-se a Equação 3 $\rightarrow D = \frac{\ln(N2 / N1)}{\ln(r1 / r2)}$, e substituindo-se os valores, temos: $D = \ln(12/2) / \ln(h/2 / h/4) = 2,585$ (entre 2 e 2,99, pois é uma estrutura com informação volumétrica).

Assim, pode-se resumir que, segundo GOODCHILD e MARK (1987), a dimensão fractal está entre 1 e 3 para uma linha, entre 2 e 3 para uma superfície, e entre 2 e 3 para um volume. CHRISTOFOLETTI (1999) sintetiza autores que trabalharam com a classificação dessas dimensões e assim explica os valores das dimensões fractais:

- a) entre 0 e 0,99 - estruturas com base em pontos, como uma série temporal sobre precipitação em determinado lugar.
- b) entre 1 e 1,99 - estruturas com base em lineamentos, como o caso das sinuosidades das linhas costeiras;
- c) entre 2 e 2,99 - estruturas de representação bidimensional, com informação volumétrica, como é o caso da rugosidade topográfica.

No exemplo da medição da extensão das linhas costeiras, quanto maior a dimensão fractal (sendo entre 1 e 1,99) maior a **tortuosidade** do espaço, pois a cada aproximação da escala de medição resultará um valor maior na extensão obtida. Também no caso da superfície topográfica, como pode ser observado na Figura 15, quanto maior a rugosidade da superfície, maior a dimensão fractal (entre 2 e 2,99), pois com a ampliação da visão será sempre encontrado um valor maior que o anterior.

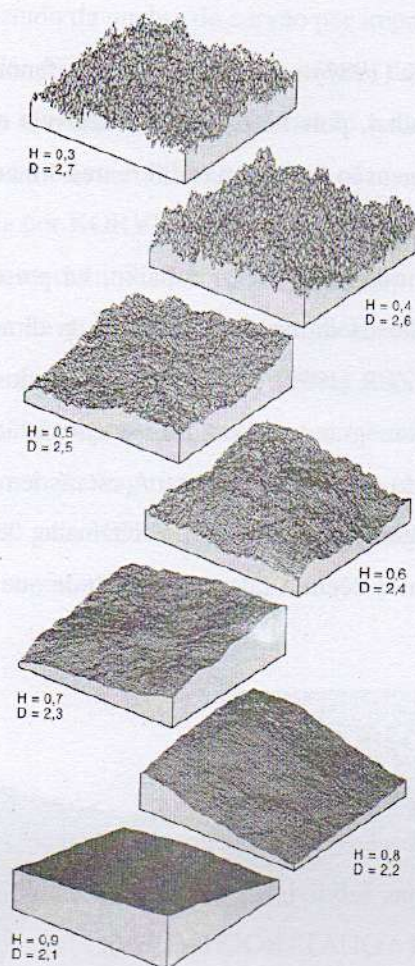


Figura 15 - A dimensão fractal na topografia, conforme GOODCHILD (1987) - citado por CHRISTOFOLETTI (1999).

FENÔMENOS MULTIFRACTAIS

A maioria dos fenômenos geográficos não são exatamente autossimilares em todas as escalas. Contudo, segundo GOODCHILD e MARK (1987), os fenômenos geográficos podem ser modelados por fractais estocásticos, nos quais as relações de escala e as propriedades de autossimilaridade do fractal têm parâmetros inexatos que podem ser descritos pela estatística (por métodos como covariância, distribuição de frequência, relações área/perímetro, etc.).

Explicando o que seria trabalhar com fractais estocásticos, DE COLA (1993, *apud* EMERSON, LAM e QUATTROCHI, 1999) coloca:

"Stochastic fractal relax the monofractal self-similarity assumption and measure many scales and resolutions in order to represent the varying form of a phenomenon as a function of local variables across space.

Multifractal fields are those in which the scaling properties of the field are characterized by a scaling exponent function. Rather than being described by a single fractal dimension, a multifractal field can be thought of as a hierarchy of sets corresponding to the regions exceeding fixed thresholds."

GOODCHILD e MARK (1987) esclarecem que nos fenômenos geográficos (e não só os geofísicos) a relação é multifractal, pois há diferentes variáveis envolvidas e correlacionadas, de modo que não há uma única dimensão fractal, mas diferentes dimensões, havendo, então, diferentes limiares.

No campo multifractal, quando o limiar é baixo, há presença de ocorrência em todas as escalas, e quando o limiar é alto há diminuição no valor da dimensão fractal. Para explicar esta relação, LOVEJOY e SCHERTZER (1993) desenvolveram estudos sobre a distribuição espacial do ouro, e concluíram que ouro em grande quantidade é encontrado em poucos lugares, mas em pequena quantidade é encontrado em muitos lugares. A estatística espacial, para tratar de situações assim nos processos de krigagem, trabalha com o chamado “efeito-pepita”, que evita que as amostras pontuais de grande valor dêem a falsa impressão de que o fato pode ocorrer em maiores extensões.

MODELOS NA APLICAÇÃO DE FRACTAIS

Para o ajuste da aplicação do conceito de fractais aos fenômenos espaciais, foram elaborados modelos baseados nas subdivisões das dimensões. A importância dos modelos é assim definida por EMERSOM, LAM e QUATTROCHI (1999):

“Maps and other models of physical phenomena are simplified abstractions of reality and necessarily involve some degree of generalization. When performed correctly, generalization both reduces the volume of data that must be stored and analysed and clarifies the analysis itself by separating signal from noise”.

Um dos modelos utilizados é o “**Comminution Model**”, ou modelo de subdivisão, que foi discutido e aplicado por FEDER em 1988 e por TURCOTTE em 1989. O modelo, baseado nos autômatos celulares, procura representar os seguintes pontos:

- Não são encontrados objetos de dimensão semelhante justapostos, mas sempre haverá um objeto menor entre dois objetos, tendendo a infinito (é o “Polímero do Diabo” na visão de Mandelbrot);
- Quanto maior a dimensão do objeto, menor sua quantidade no conjunto;
- O fenômeno apresenta, dentro de um domínio, padrões semelhantes nas diferentes escalas;
- Quando há a mudança na fase, há objetos de todas as dimensões e o elemento está em sua potencialidade máxima;
- Há diferentes níveis hierárquicos envolvidos, e o processo de fragmentação ocorre em cascata, a partir de uma condição inicial.

Segundo TURCOTTE (1991), aplicando esse modelo foram desenvolvidos estudos como o da quebra do carvão por impacto ou explosivos, a fragmentação tectônica, a quebra do gelo no mar

e a modelagem de fraturas. No estudo da quebra do carvão por impacto ou explosivos, o autor cita o trabalho de Bennett, que, ainda em 1936, definiu a ordem do tamanho do grão de carvão, observando os limites mais altos e os mais baixos. No carvão a dimensão fractal fica em torno de 2,5, muito próxima à do modelo do cubo (2,585).

Na Figura 16, apresentada por KORVIN (1992), observa-se o exemplo da quebra de gelo no mar, formação fractal semelhante ao exemplo do carvão, comprovando os pontos: haverá um objeto menor entre dois objetos, tendendo a infinito; quanto maior a dimensão do objeto, menor sua quantidade no conjunto; dentro de um domínio há padrões semelhantes nas diferentes escalas; quando há a mudança na fase, há objetos de todas as dimensões e o elemento está em sua potencialidade máxima e o processo de fragmentação ocorre em cascata, a partir de uma condição inicial. Juntamente ao exemplo do gelo KORVIN coloca um fractal elaborado por Mandelbrot que descreve situação semelhante à encontrada na natureza.

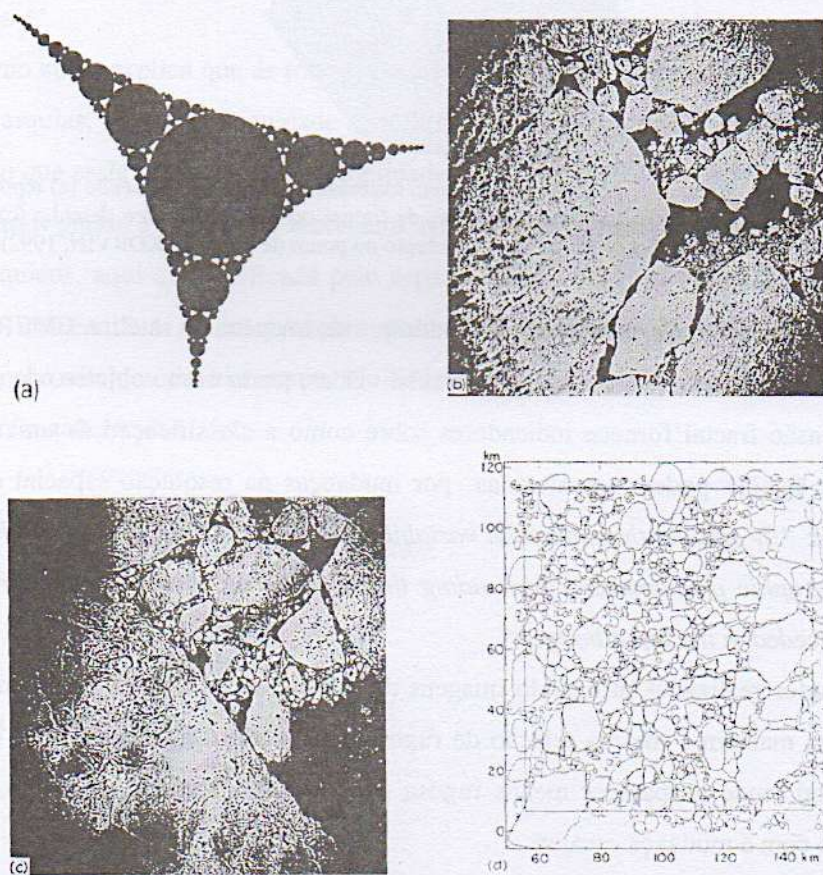


Figura 16 - Formação fractal de pedaços de quebra do gelo no mar, descritos por MANDELBROT em 1982. (KORVIN, 1992).

O fenômeno das fraturas, segundo TURCOTTE (1989), é um exemplo da invariância escalar - as zonas de fraqueza onde ocorrem as rupturas podem ser encontradas em todas as escalas, a partir

de uma condição inicial. Na Figura 17, organizada por KORVIN (1992) está a simulação das fraturas por modelagem matemática, apresentando padrões semelhantes nas diferentes escalas. Nos modelos, a probabilidade de fraturas apresenta distribuição randômica, e depende de constantes de elasticidade e da acumulação de estresse nas ligações da rede. KORVIN (op. cit) cita vários estudos sobre o tema, nos quais observam-se padrões de autossimilaridade no momento de ruptura, e a dimensão fractal varia de 1.27 a 1.68.

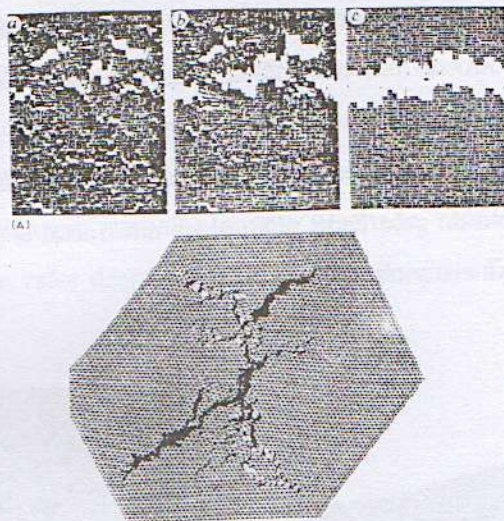


Figura 17 - A distribuição fractal de fraturas por modelagem matemática. O primeiro desenho (a) representa bem antes da fratura ocorrer, o segundo desenho (b) um pouco antes da fratura ocorrer e o terceiro desenho (c) é já a própria fratura. O quarto desenho representa uma malha de triangulação no ponto de fratura. (KORVIN, 1992).

No estudo das relações entre texturas e padrões nas imagens de satélite, EMERSON, LAM e QUATTROCHI (1999) aplicaram o modelo de subdivisões, tendo como objetivo demonstrar que o estudo da dimensão fractal fornece indicadores sobre como a classificação de uma imagem ou a identificação de feições podem ser afetadas por mudanças na resolução espacial do sensor. Os autores colocam: *"By finding the maximum variability of data set, one could find the operational domain of geographic phenomenon, thus aiding the selection of the appropriate resolution and spatial extend needed in the input imagery"*.

Nos estudos realizados utilizando imagens de satélite, estes autores puderam perceber que uma área urbana mantém a mesma relação de rugosidade, sendo não-variável com a escala. Uma cobertura vegetal tende a aparecer menos rugosa com a diminuição da resolução, apresentando grande variação com a mudança escalar.

Com os estudos de relações, ganha força o estudo de **"Modelos de Difusão"** em Geografia. Chama-se modelo de difusão espacial os fenômenos de propagação no tempo e no espaço de um elemento simples ou complexo. A idéia foi inicialmente discutida por HÄGERSTRAND, em 1952, enfocando a difusão de técnicas agrícolas e subsídios na Suécia, e melhor detalhada em seus estudos sobre *"Time Geography"* (1970) no qual propôs métodos de abordagem dos efeitos do

tempo e do espaço nas relações humanas. Para o autor, as relações espaço-tempo são condicionadas pelos limites de capacidade, associação e autorização (*capability, coupling and authority*), o que significa a capacidade, por exemplo, imposta pelos limites físicos do homem; a associação para a cooperação e coordenação entre indivíduos com o objetivo de realização de certas tarefas; e a autorização diz respeito a regras, regulamentos.

LANGRAN (1992) destaca que os modelos de difusão ganharam importância a partir do advento dos recursos de geoprocessamento. Destaca-se, ainda, que o tema está em sintonia com os estudos sobre o Caos.

Para os físicos, a difusão é um processo de redistribuição de moléculas no espaço, pois com o adensamento em um ponto (saturação) ocorre a distribuição para áreas vizinhas. Segundo DAUPHINÉ (1995), *"Dans les sciences sociales, a l'origine de toute diffusion se trouve une innovation; elle peut être d'origine matérielle, comme celle de la pomme de terre en Europe au XVIIIe siècle, ou d'origine sociale ou culturelle, par exemple la diffusion de l'intégrisme religieux au Moyen-Orient"*

O mesmo autor explica que as formas de difusão no espaço geográfico podem ser ao acaso, por novas hierarquias, ou por contiguidade sem limitações. Na Figura 18 observa-se, inicialmente, um esquema do que seria a difusão por contiguidade e sem limitações: a partir de um núcleo inicial novos incrementos geram a difusão do fenômeno. No segundo esquema, está retratada a difusão por núcleos hierárquicos, aqui exemplificada pelo espaço urbano, no qual algumas centralidades têm seus raios de influência e as intervenções pontuais têm efeitos de irradiação de resultados condicionados por arranjos da hierarquia. No último esquema está a difusão ao acaso, que não segue regras pré-estabelecidas.

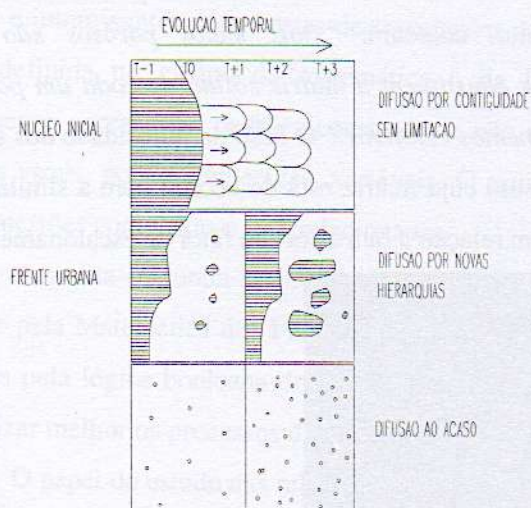


Figura 18 - Formas de difusão em geografia. Adaptado de DAUPHINÉ (1995).

Os modelos de difusão têm se beneficiado da aplicação do "Comminution Model", principalmente nos estudos de percolação, de processos hídricos, de escoamento superficial, e nos

modelos de estruturas de solos. Nos modelos de percolação estuda-se a distribuição das partículas e da porosidade nas estruturas. A Figura 19 mostra como se dá a percolação da água no solo: nos itens a e b há a invasão da água no solo seco, e nos itens c e d a invasão do ar em um solo saturado pela água.

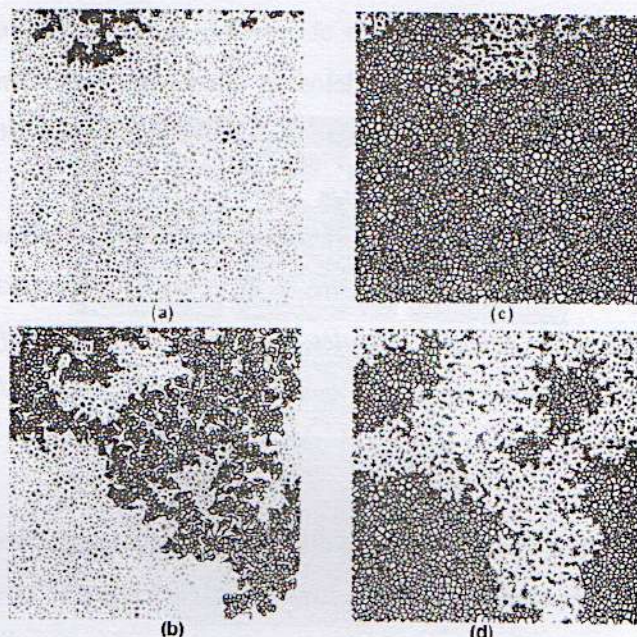


Figura 19 - A invasão da percolação em uma estrutura randômica. As figuras *a* e *b* mostram a invasão da água em um solo seco; enquanto que as figuras *c* e *d*, na sequência, mostram a invasão do ar em um solo saturado pela água. (PERRIER *et al.*, 1995).

A aplicação do modelo de estudo da percolação e dinâmica da água no solo tem como referência a análise clássica de MILLER, de 1953, para o escalonamento do fluxo de água através de solos não saturados, com base na suposição de semelhança geométrica. CRESTANA e POSADAS (1996), ao explicarem o conceito, colocam: “Dois meios porosos são ditos geometricamente similares se as partículas que constituem a matriz sólida de cada um possuem formas e orientações idênticas, exceto para aumentos relativos.” O caso da porosidade dos solos é exemplificado na Figura 20. Assim, tendo um solo cuja matriz está de acordo com a similaridade geométrica, uma região pode ser caracterizada em relação a outra por um fator de escalonamento.

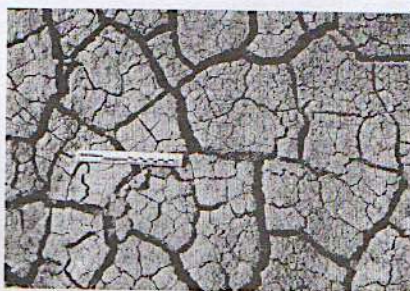


Figura 20 - Exemplo da relação fractal na superfície de solos, na qual podem-se observar diferentes níveis de agregação na conformação da porosidade. (PERRIER *et al.*, 1995)

Outro modelo que foi desenvolvido para aplicação em arranjos fractais foi o modelo “Ninho de Pombo”, ou “Pigeon-Hole”, apresentado na Figura 21. O estudo foi desenvolvido, inicialmente, para representação das superfícies internas de rochas sedimentares e ígneas. Nesse modelo o quociente de autossimilaridade é de 0,25 e o valor da dimensão fractal das paredes dos poros no caso de rochas sedimentares é $D=2,36$.

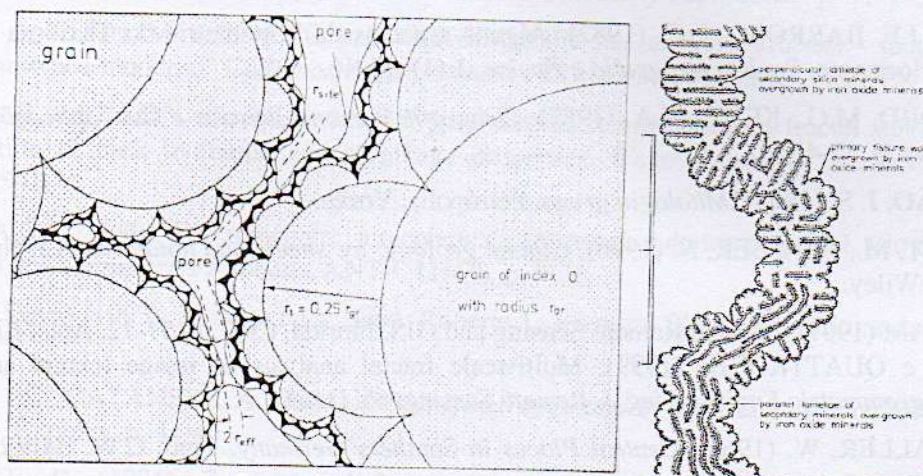


Figura 21 - Modelo Ninho de Pombo. Cada célula (forma côncava) gera novas células cujo raio é 0.25 do raio da célula de origem, e o número de novas formas côncavas em torno da forma anterior é 26.5. Além do arranjo das células componentes são formados espaços vazios, conformando a porosidade. A primeira figura representa a porosidade em rochas sedimentares, e a segunda retrata microfissuras no granito. Ambos os exemplos são propostos por Pape et al, 1987 e 1981. (KORVIN, 1992).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Embora já dispondo de referencial bibliográfico crescente, o estudo dos fractais nos fenômenos espaciais ainda se encontra no começo, de modo que poderemos ser surpreendidos por novas e interessantes descobertas de correlações de fenômenos ambientais. A teoria já se encontra bem definida no campo da matemática e da física, principalmente da matemática, pois os fenômenos apresentam padrões constantes e não sofrem a interferência de inúmeras, mutantes e muitas vezes, pouco conhecidas, variáveis. O estudo dos fenômenos ambientais exige o trabalho com questões complexas e interrelacionadas.

Acredita-se, ainda assim, que vale a pena abordar as novas visões trazidas pela Teoria do Caos e pela Matemática dos Fractais, como forma de se desvencilhar de pensamentos euclidianos, regidos pela lógica booleana do sim ou não, e adotar a lógica da complexidade, que nos permite visualizar melhor os processos dinâmicos.

O papel do estudo das relações fractais está, sem dúvida alguma, na possibilidade de ampliar ou reduzir informações aos seus domínios, facilitando a sempre necessária generalização das informações espaciais. Facilitando e aproximando os resultados obtidos da realidade.

Cabe lembrar a colocação de FERNANDES (1996): “Experimentos de campo têm caráter

pontual no espaço e no tempo". O acompanhamento da dinâmica ambiental, hoje, só é possível pela construção de modelos que viabilizem a relação representação/espaço real.

BIBLIOGRAFIA

- ABREU, J.F., BARROSO, L.C. (1982). Alguns aspectos da "Geometria do Taxi" na Geografia. Belo Horizonte, *Revista Geografia e Ensino*, 1 (1): 31-46.
- BRADFORD, M.G., KENT, W.A. (1987): *Geografia humana: teorias e suas aplicações*. Lisboa, Gradiva, p. 17-45.
- BRANDÃO, J. S. (1995). *Mitologia grega*. Petrópolis, Vozes.
- BENNETT, M., GLASSER, N. (1996). *Glacial geology: ice sheets and landforms*. Chichester, New York, Wiley.
- CAO e LAM (1997): Scale in Remote Sensing and GIS. Florida, CRC, p. 57-72. Apud EMERSOM, LAM e QUATTROCHI (1999): Multi-scale fractal analysis of image texture and pattern. *Photogrammetric Engineering & Remote Sensing*. 65(1): 51.
- CHRISTALLER, W. (1966). *Central Places in Southern Germany*. Trad. C.W. Baskin. Prentice-Hall.
- CHRISTOFOLETTI, Antônio (1999): *Modelagem de Sistemas Ambientais*. São Paulo, Edgard Blucher, p. 51-75.
- CODD, E. F. (1968). *Cellular automata*. New York, Academic Press. Apud. LANGRAN, Gail (1992). *Time in Geographic Information Systems*. Londres, Taylor & Francis. p. 15.
- CRESTANA, S., POSADAS, A. (1996). Dinâmica da água e de solutos na região não-saturada do solo: modelagem determinística e estocástica *Instrumentação agro-pecuária - contribuição no limiar do novo século*. Brasília, Embrapa, p.263-286.
- DAUPHINÉ, André (1995): *Chaos, fractales et dynamiques en géographie*. Montpellier, GIP Reclus, 136 p.
- EMERSOM, C., LAM, N., e QUATTROCHI, D (1999): "Multi-scale fractal analysis of image texture and pattern" *Photogrammetric Engineering & Remote Sensing*. 65(1), p. 51-61.
- FEDER, J. (1988). *Fractals*. New York, Plenum Press. Apud TURCOTTE, Donald (1992). *Fractals and chaos in geology and geophysics*. Cambridge, University Press.
- FERNANDES, Nelson (1996): "Modelagem matemática em geomorfologia: potencialidades e limitações". Uberlândia, *I Simpósio de Geomorfologia*. 6 p.
- GLEICK, James (1990): *Caos: a criação de uma nova ciência*. Rio de Janeiro, Campos. 349 p.
- GOODCHILD, M. F., MARK, D. M. (1987). The fractal nature of geographic phenomena. *Annals Association of American Geographers*. 77 (2). P. 265-278.
- HÄGERSTRAND, T. (1970). What about people in regional science? Londres, *Papers of the Regional Science Association*., n. 24. p. 7-21.
- KORVIN, Gabor (1992). *Fractal models in the earth sciences*. Amsterdam, Elsevier.
- LANGRAN, Gail (1992). *Time in Geographic Information Systems*. Londres, Taylor & Francis. p. 1-25.
- LOVEJOY, S., SCHERTZER, D. (1993). Scale invariance and multifractals in the atmosphere. *Concise Encyclopedia of Environmental Systems*. Oxford, Pergamon Press, p. 523-528. Apud

- CHRISTOFOLETTI, Antônio (1999): *Modelagem de Sistemas Ambientais*. São Paulo, Edgard Blucher, p. 51-75.
- MANDELBROT, B. (1967) How long is the the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension. *Science*, 156: 636-638.
- MANDELBROT, B. (1977). *The fractal geometry of nature*. New York, Freeman and Co.
- MILLER, Austin (1953). *The skin of the earth*. London, University Paperbooks. p. 91-195.
- MOURA, Ana Clara M. (1994): "O papel da cartografia nas análises urbanas - tendências no urbanismo pós-moderno" *Cadernos de Arquitetura e Urbanismo*. PUC.MG, p. 41-73.
- PERRIER, E., MULLON, C., RIEU, M. (1995): Computer construction of fractal soil structures: simulation of their hydraulic and shrinkage properties. *Water Resources Research*, 31(12): 2927-2943.
- PRADO, A.C.S. (1989). Não transporte, a reconquista ao espaço e do tempo social. Rio de Janeiro, *Revista dos Transportes Públicos*, ANTP, 11(44). p. 9-26.
- RUELLE, David (1993). *Acaso e caos*. Trad. Roberto L. Ferreira. São Paulo, Editora da Unesp, p. 39-47.
- SNYDER, J.C., CATANESE, A. (1984). *Introdução à arquitetura*. Trad. Heloísa Frederico. Rio de Janeiro, Campus. p. 44-46.
- TURCOTTE, D. (1986). Fractals and fragmentation. *J. Geophys*, 91, p. 1921-1926. Apud KORVIN, Gabor (1992). *Fractal models in the earth sciences*. Amsterdam, Elsevier.
- TURCOTTE, D. (1989). Fractals in geology and geophysics, *Pure Appl. Geophys*. 131, p. 171-196. Apud TURCOTTE, Donald (1992). *Fractals and chaos in geology and geophysics*. Cambridge, University Press.
- TURCOTTE, Donald (1991): "Fractals in geology: what are they and what are they good for?" *GSA Today* (Geological Society of America), 1(1): 1-4.
- TURCOTTE, Donald (1992). *Fractals and chaos in geology and geophysics*. Cambridge, University Press.
- UBIRAJARA-DA-SILVA, Adriana B (1998): *Um ensaio sobre a Teoria do Caos no fenômeno urbano*. Belo Horizonte, EA-UFMG, 86 p.

RESUMO

Diante das discussões sobre a nova ciência, baseada na Teoria do Caos, a matemática dos fractais surge como uma proposta de compreensão das relações entre as partes componentes de um sistema complexo. O presente trabalho é uma breve revisão bibliográfica sobre termos e conceitos que têm sido empregados nessa nova ciência, com ênfase à sua aplicabilidade aos estudos geográficos.

ABSTRACT

With the discussions of a new science, based on Chaos Theory, the fractal mathematics proposes a new way of understanding the relations between the components on a complex system. This paper is a brief overview on terms and concepts that are been used on this new science, with emphasis on its applicability to geographical studies.